შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

03.05.2014/ მათ/III/M 344

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$$\frac{a_k^3}{a_k^2+a_{k+1}a_{k+2}} = \frac{a_k^3 + a_k a_{k+1} a_{k+2} - a_k a_{k+1} a_{k+2}}{a_k^2 + a_{k+1}a_{k+2}} = a_k - \frac{a_k a_{k+1} a_{k+2}}{a_k^2 + a_{k+1}a_{k+2}}$$

[illegible] k-[illegible] [illegible]

$$\frac{a_1a_2a_3}{a_1^2+a_2a_3} + \frac{a_2a_3a_4}{a_2^2+a_3a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}a_na_1}{a_{n-1}^2+a_na_1} + \frac{a_na_1a_2}{a_n^2+a_1a_2} \leq \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{2}$$

$a_k^2 + a_{k+1}a_{k+2} \geq 2a_k\sqrt{a_{k+1}a_{k+2}}$ [illegible]

[illegible]

$$\frac{a_1a_2a_3}{2a_1\sqrt{a_2a_3}} + \frac{a_2a_3a_4}{2a_2\sqrt{a_3a_4}} + \dots + \frac{a_{n-1}a_na_1}{2a_{n-1}\sqrt{a_na_1}} + \frac{a_na_1a_2}{2a_n\sqrt{a_1a_2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_2a_3} + \sqrt{a_3a_4} + \dots + \sqrt{a_na_1} + \sqrt{a_1a_2}\right)$$

ე.ი. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{a_1a_2} + \dots + \sqrt{a_na_1}\right) \leq \frac{1}{2}(a_1+\dots+a_n) \Leftrightarrow$

$2\left(\sqrt{a_1a_2} + \quad + \sqrt{a_na_1}\right) \leq 2(a_1 + \dots + a_n)$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

| | |
|---|---|
| მაგიდა № 1 | 03.05.2014/ მათ/III/ M344 |
| ამოცანა № 1 | გვერდი № 2 |

გადავწეროთ ეს ჯამი და დავამტკიცოთ

$$0 \le (a_1 - 2\sqrt{a_1a_2} + a_2) + \dots + (a_i - 2\sqrt{a_ia_j} + a_j) + \dots +$$

$$+ (a_n - 2\sqrt{a_na_1} + a_1) = (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 + \dots + (\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2 + (\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1})^2$$

სწორია

ეს არაუარყოფითია რადგან $X^2 \ge 0$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

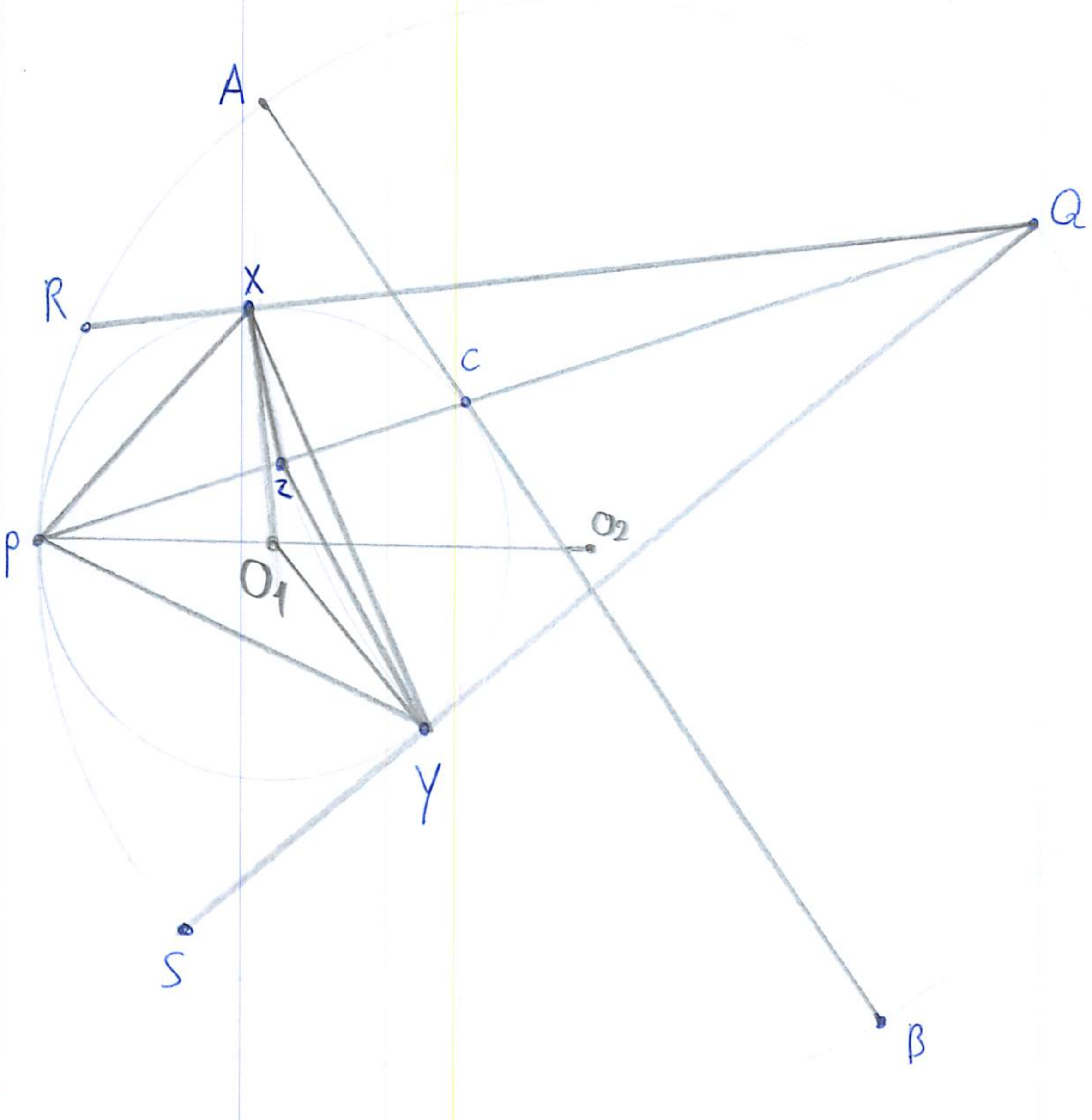
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

03.05.2014/ მათ/III/ M344

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

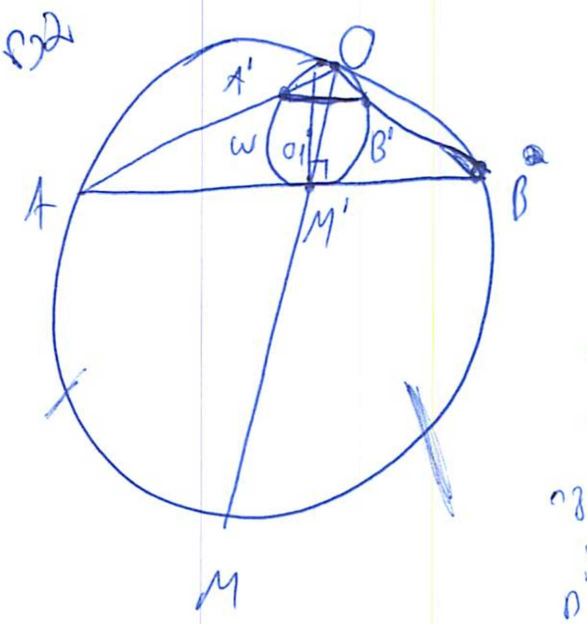
მაგიდა № 1

03.05.2014/ მათ/III/ M344

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

I გზა




იმ ჰომოთეტიით რომელიც

$M' \to M$ და ცენტრი $O$

$A'B' \to AB$ ანუ $A'B' \parallel AB$

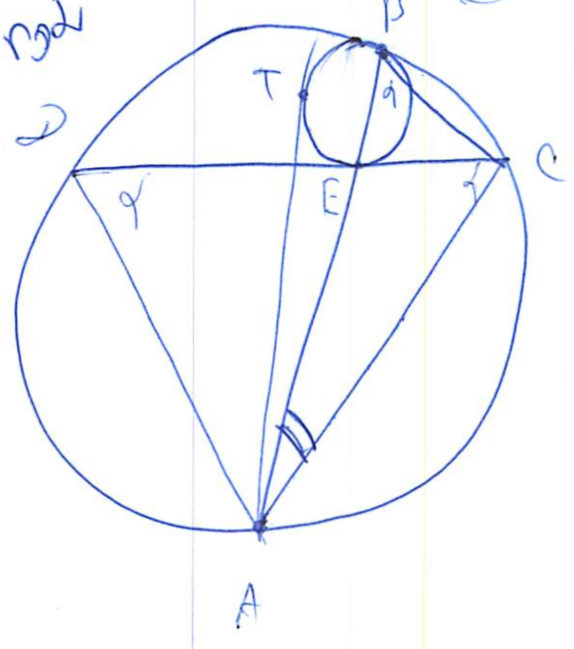
ანუ $A'B' \perp M'O_1$ სადაც $O_1$ ω-ს

ცენტრი ანუ $\breve{A'M'} = \breve{B'M'}$

იგივე ჰომოთეტიით $\breve{A'M'} \to \breve{AM}$ და

$\breve{B'M'} \to \breve{BM}$ ანუ $\breve{AM} = \breve{BM}$

II გზა




$\angle ABC = \alpha$ $\angle ADC = \alpha$

$\angle DCA = \alpha$ $\triangle ACE \sim \triangle ABC$

ანუ $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AC}{AE+EB} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC^2 = AE(AE+EB)$

ანუ $AC = AT$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

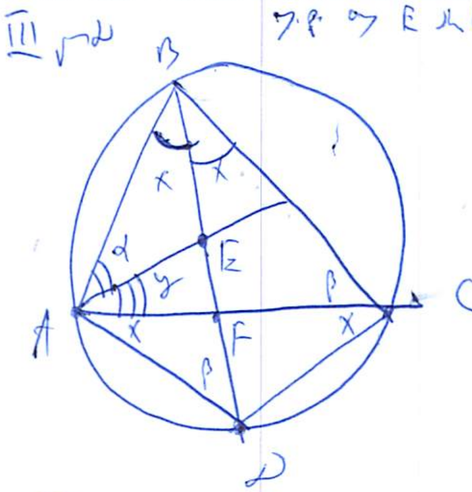
მაგიდა № 1

03.05.2014/ მათ/III/ M 344

ამოცანა № 2

გვერდი № 3

III გზა




[illegible] E [illegible] $DC = DE = AD$

~~[illegible]~~

$AD = DC$ [illegible] $DB$-ზე $AD$-ს [illegible] $DE$

$\triangle ADC$ $180 - \beta = 2x + \alpha + y$ $\Rightarrow$ $2x + \alpha + y = 2x + 2y \Leftrightarrow$

$\triangle AED$ $(x + \alpha) \cdot 2 = 180 - \beta$ $\Leftrightarrow \alpha = y$ [illegible] $AE$

[illegible] E [illegible] ნს. [illegible]

[illegible]

[illegible] I [illegible] $AQ = QB$

III [illegible] X Y და Z [illegible]. [illegible]

QR QS და QP [illegible] Q-დან QA-ს [illegible]

და II [illegible] XPY [illegible]

$\angle PYC + \angle PXC = 180$ [illegible], [illegible] $\angle ZXC + \angle ZYC = 90°$

[illegible] $\angle PXZ + \angle PYZ = 90°$. [illegible] Q [illegible]

და QX [illegible] Z Y [illegible] $\angle XZY =$

[illegible] $\overset{\frown}{XY} \cdot \frac{1}{2}$ [illegible] $\overset{\frown}{XY}$ [illegible] Z

[illegible] $\angle XQY$ [illegible] $\overset{\frown}{XY}$-ს [illegible] Z

[illegible] $2\angle XZY = 360 - \angle XQY$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

03.05.2014/ მათ/III/ M344

ამოცანა № 2

გვერდი № 4

$\angle ZXC + \angle ZYC = \angle ZXY + \angle ZYX + \angle YXC + \angle XYC =$

$= 180 - \angle XZY + \frac{1}{2}\overset{\frown}{XCY} = \frac{1}{2}\angle XQY + \frac{1}{2}\overset{\frown}{XCY}$

$\frac{1}{2}\angle XQY + \frac{1}{2}\overset{\frown}{XCY} = 90^\circ \Leftrightarrow \angle XQY + \overset{\frown}{XCY} = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\angle XQY + \angle XO_1Y = 180^\circ$, რაც სწორია $\angle O_1XQ = \angle O_1YQ =$

$= 90^\circ$